ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1ο ΘΕΜΑ

Δίνονται δύο μιγαδικοί z,w και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |z| \cdot x^3 + |w| \cdot x^2 - |z+w|$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μία λύση στο [-1, 1].

2ο ΘΕΜΑ

Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο R με f(7)=6 και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad (1)$. Να βρείτε το f(5).

3Ο ΘΕΜΑ

Έστω f:[α,β]→ R συνεχώς συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί z=α,βi, z_1=α+f(α)i, z_2=β+f(β)i. Αν ισχύει

$$3(z^2 - \bar{z}^2) - 4i z\bar{z} = 4i \cdot Re(z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

να δειχθεί ότι η Cf έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα x'x.

4Ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:R → R για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)+x \cdot f(x)-1=0$ (1) για κάθε $x \in R$

ι) Δείξτε ότι η f διατηρεί το πρόσημο της

ιι) Αν f(0)>0, να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

Η f είναι συνεχής στο [-1,1] ως πολυωνυμική $f(-1) = -|z| + |w| - |z+w| \quad (1)$

Όμως

$$|w| - |z| \le ||z| - |w|| \le |z+w| \Leftrightarrow |w| - |z| - |z+w| \le 0 \Leftrightarrow (1)\ f(-1) \le 0$$

$$f(1) = -|z| + |w| - |z+w| \quad (2)$$

Όμως

$$|z+w| \le |z| + |w| \Leftrightarrow |z| + |w| - |z+w| \ge 0 \Leftrightarrow (1)\ f(1) \ge 0$$

Επομένως $f(-1) \cdot f(1) \le 0$

- Αν $f(-1) \cdot f(1) < 0$ τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0)=0$.

- Αν $f(-1) \cdot f(1) = 0$ τότε $x_0=1$ ή $x_0=-1$

Άρα η f(x)=0 έχει λύση στο [-1, 1].

ΛΥΣΗ 2ΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

Για x=7 η (1) γίνεται

$$f(7) \cdot f(f(7))=1 \Leftrightarrow 6 \cdot f(6) = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{6}$$

Η f είναι συνεχής στο [6,7] και

f(6) < 5 < f(7).

Άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (6,7)$ ώστε $f(x_0)=5$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται

$$f(x_0) \cdot f(f(x_0))=1 \Leftrightarrow 5 \cdot f(5) = 1 \Leftrightarrow f(5) = \frac{1}{5}$$

ΛΥΣΗ 3ΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

Αρχικά βρίσκω το $Re(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (\alpha + f(\alpha) i)\ (\beta - f(\beta) i$$

$$= \alpha \cdot \beta - \alpha f(\beta) i + \beta f(\alpha) i - f(\alpha) \cdot f(\beta) i^2$$

$$= (\alpha\beta + f(\alpha) \cdot f(\beta)) + (\beta f(\alpha)$$

άρα $Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \alpha\beta + f(\alpha) \cdot f(\beta)$

Οπότε η σχέση

$3(z^2 - \bar{z}^2) - 4i z\bar{z} = 4i \cdot Re(z_1 \cdot \bar{z}_2)$ γράφεται

$$3\left[(\alpha+\beta i)^2 (\alpha-\beta i)^2\right] - 4i \cdot (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)$$

$$= 4i(\alpha\beta + f(\alpha) f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i - \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2) -$$

$$- 4i(\alpha^2 + \beta^2) - 4i(\alpha\beta + f(\alpha) \cdot f(\beta)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12\alpha\beta i - 4i(\alpha^2+\beta^2) - 4i(\alpha\beta + f(\alpha) \cdot f(\beta))=0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta = f(\alpha) \cdot f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) = -(\alpha - \beta)^2 < 0$$

Επειδή η f συνεχής στο [α, β] άρα πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [α, β], οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, άρα η Cf τέμνει τον x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ΛΥΣΗ 4ΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

ι) Υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί το πρόσημό της, άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1) \cdot f(x_2)<0$.

Η f πληρεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[x_1, x_2]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Για $x=x_0$, η σχέση (1) γράφεται

$$f^2(x_0)+x_0 \cdot f(x_0)-1=0 \Leftrightarrow -1=0 \text{ (Άτοπο)}$$

Άρα η f διατηρεί σταθερό το πρόσημό της.

ιι) Θεωρώντας τη σχέση (1) ως τριώνυμο με άγνωστο το f(x), βρίσκουμε ότι

$$f(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4}}{2}$$

και επειδή f(0)>0 και η f διατηρεί το πρόσημό της άρα

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2} \quad (f(0)=1>0)$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**